CH 8 Identité de Bézout

EX 13 :

1. a/ * Pour n=1 $u^n = u^1 = u = 2+\sqrt{3} = a_1 + b_1\sqrt{3}$ avec $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ deux entiers naturels

Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ avec a_n et b_n deux entiers

et montrons que $u^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$ avec a_{n+1} et b_{n+1} deux entiers

On a $u^n = a_n + b_n\sqrt{3} \Rightarrow u^{n+1} = u.u^n = (2+\sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = (2a_n+3b_n)+(2b_n+a_n)\sqrt{3}$

$= a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$

Comme a_n et b_n sont deux entiers naturelles alors $a_{n+1} = 2a_n+3b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n+a_n$ sont deux entiers naturelles

Cl : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ avec a_n et b_n deux entiers naturelles

b/ $a_{n+1} = 2a_n+3b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n+a_n$

2. a/ (Par recurrence)

* Pour n=1 $a_n^2 - 3b_n^2 = a_1^2 - 3b_1^2 = 2^2 - 3\times 1^2 = 1$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ *et montrons que* $a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = 1$

$$a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = (2a_n+3b_n)^2 - 3(a_n+2b_n)^2$$
$$= 4a_n^2 - 3a_n^2 + 9b_n^2 - 12b_n^2 + 12a_nb_n - 12a_nb_n$$
$$= a_n^2 - 3b_n^2 = 1$$

$$a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = a_n.(a_n+2b_n) - (2a_n+3b_n)b_n$$
$$= a_n^2 + 2a_nb_n - 2a_nb_n - 3b_n^2 = a_n^2 - 3b_n^2 = 1$$

b/ On a $\forall n \geq 1$ $\left.\begin{array}{l} a_n \text{ et } b_n \text{ deux entiers naturelles} \\ a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1 \end{array}\right\} \overset{\text{bezout}}{\Rightarrow}$ $a_n \wedge b_n = 1 = a_n \wedge a_{n+1} = b_{n+1} \wedge b_n$

EX 14:

a/ 7^14=7 ne divise pas 5 donc l'équation 7x-14y =5 n'admet pas de solutions

b/ $5x-10y=10 \Leftrightarrow x-2y=2 \Leftrightarrow x=2+2y$ Donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(2+2k,k)\ k \in \mathbb{Z}\}$

c/ 29^58=29 ne divise pas 3 donc l'équation 29x+58y=3 n'admet pas de solutions

Qarray.tn -Adra Blech- Qarray.tn